

## סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס סטטיסטיקה 2. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר [www.gool.co.il](http://www.gool.co.il).

**GOOL**  
בשביל התירגול

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

**גול זה בול. בשבילך!**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - ברק קנדל ©

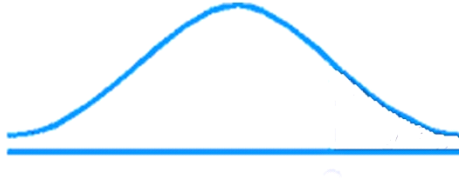
## תוכן

3	פרק 1 - התפלגות נורמלית
12	פרק 2 - קומבינציות לינאריות להתפלגות נורמאלית
15	פרק 3 - הסקה סטטיסטית - הקדמה
18	פרק 4 - התפלגות הדגימה
18	ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי
27	התפלגות סכום תצפיות המדגם ומשפט הגבול המרכזי
30	פרק 5 - מושגים בסיסיים באמידה
37	פרק 6 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה)
37	רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה
43	קביעת גודל מדגם באמידת תוחלת עם שונות אוכלוסייה ידועה
46	רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה) כששונות האוכלוסייה אינה ידועה
52	פרק 7 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)
52	כאשר שונות האוכלוסייה ידועה
57	סיכוי לטעויות ועוצמה כאשר שונות האוכלוסייה ידועה
64	קביעת גודל מדגם כששונות האוכלוסייה ידועה
67	מובהקות התוצאה ( $p$ -value) בבדיקת השערות על תוחלת עם שונות ידועה
72	בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כאשר שונות האוכלוסייה אינה ידועה
77	מובהקות התוצאה ( $p$ -value) כאשר שונות האוכלוסייה לא ידועה
81	ניתוח פלטי SPSS
86	הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת

## פרק 1 - התפלגות נורמלית

### רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} : \text{נוסחת פונקציית הצפיפות}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות  $Z$ .

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

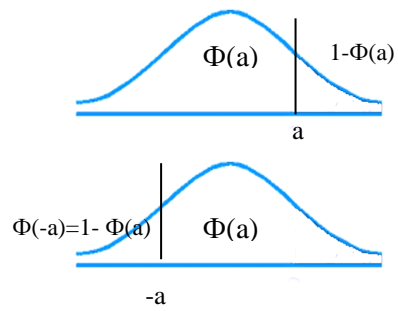
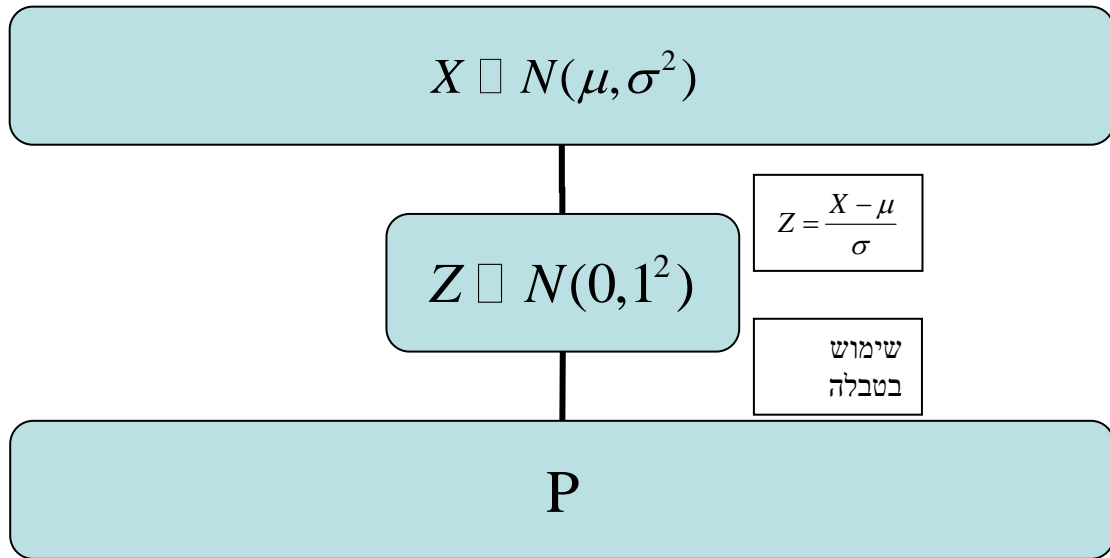
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.

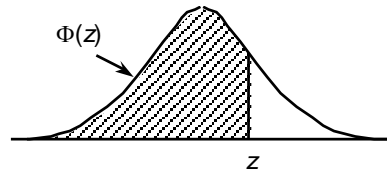
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :



**טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי  $\Phi(z)$**



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

**דוגמה:** (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל- 110 גרם?
- ב. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
- ג. מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
- ד. מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

## תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות .

- א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
- ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
- ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
- ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג .

- א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
- ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
- ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
- ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
- ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל – 140 ק"ג?

4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטיית תקן 400 גרם.

- א. מצאו את העשירון העליון.
- ב. מצאו את האחוזון ה-95.
- ג. מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונויות 225 .
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
  - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
  - מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
  - מהו האחוזון ה- 20?
  - מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש-33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?
  - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בבקבוק לבדיקה?
  - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
  - מהי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
  - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
  - מהו המאון העליון של אורח חיי מכשיר?
  - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?



8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?  
 ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?

א. בעשירון העליון.

ב. בממוצע.

ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

א. 1

ב. 2

ג. 3

ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה

הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן

הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות

שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל-T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונות :

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 3</u>
א. 89.25%	א. 26.43%
ב. 2.28%	ב. 89.44%
ג. 0	ג. 39.44%
ד. 50%	ד. 0.383
	ה. 100%
<u>שאלה 5</u>	<u>שאלה 7</u>
א. 119.2	א. 500
ב. 80.8	ב. 100
ג. 112.6	ג. 0.3446
ד. 87.4	ד. 733
	ה. 267
<u>שאלה 8</u>	<u>שאלה 9</u>
א. 3	א. 0.1587
ב. בממוצע.	ב. 0.0228
ג. 1	ג. 0.8563
	ד. 0.3975
<u>שאלה 10</u>	<u>שאלה 11</u>
א. 1925	א. 0.1359
ב. 0.2266	ב. 0.675
ג. 0.1587	ג. 100
	ד. 0.25

## פרק 2 - קומבינציות לינאריות להתפלגות נורמאלית

### רקע:

כל קומבינציה לינארית של משתנים המתפלגים נורמאלית מתפלגת נורמאלית בעצמה.

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

הגובה של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ, כמו כן הגובה של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 165 ס"מ וסטיית תקן של 8 ס"מ.

מה הסיכוי שגבר אקראי מהמדינה יהיה גבוה מאישה אקראית? ( 0.7823 )

## תרגילים:

1. המשקל של גברים במדינת ישראל מתפלג נורמלית עם תוחלת של 75 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.  
כמו כן המשקל של נשים במדינה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 65 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.  
מה הסיכוי שאישה אקראית תהיה בעלת משקל גבוה יותר מגבר אקראי?
  
2. ההוצאה השנתית על ביגוד לאדם מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3000 ₪ וסטיית תקן של 1000 ₪. ההוצאה השנתית על בילויים מתפלגת נורמלית עם תוחלת של 4000 ₪ וסטיית תקן של 1500 ₪. מקדם המתאם בין ההוצאה השנתית על ביגוד וההוצאה השנתית על בילויים הינו 0.6.  
א. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של התפלגות ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?  
ב. מה הסיכוי שההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי תעלה על 8000 ₪?  
ג. מהו העשירון העליון של ההוצאה השנתית הכוללת על ביגוד ובילוי?
  
3. צריכת הירקות היומית במסעדה מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 ק"ג וסטיית תקן של 4 ק"ג. נתון שמחיר ק"ג ירק הוא 6 ₪ לקילו.  
א. מה התוחלת ומהי השונות של העלות היומית של ירקות למסעדה?  
ב. מה ההסתברות שהעלות היומית על ירקות תהיה נמוכה מ-290 ₪?  
ג. מהו האחוזון ה-40 של התפלגות העלות היומית של המסעדה על ירקות?
  
4. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.  
א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז.  
ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
  
5. לדוד משה הייתה חווה. בחווה פרה ועזה. תנובת החלב של הפרה מתפלג נורמלית עם ממוצע של 20 ליטר ביום וסטיית תקן של 5 ליטר ותנובת החלב של העזה מתפלג גם כן נורמלית עם ממוצע של 10 ליטר וסטיית תקן של 2 ליטר. כל ליטר חלב פרה נימכר ב-2 ₪ וליטר חלב עזה נימכר ב-3 ₪.  
א. מה הסיכוי שהפדיון היומי של דוד משה מחלב יהיה לפחות 62 ₪?  
ב. מה הסיכוי שמתוך 5 ימים יהיו לפחות 4 ימים בהם תנובת החלב מהפרה והעזה ביחד תהיה מתחת ל-30 ליטר?  
ג. מה הסיכוי שביום מסוים תנובת הפרה תהיה נמוכה מתנובת העזה?

**פתרונות:****שאלה 1**

0.2177

**שאלה 2**

א. תוחלת 7000, סטיית תקן 2247.

ב. 0.3264

ג. 9881

**שאלה 3**

א. תוחלת 300, שונות 576.

ב. 0.3372

ג. 294

**שאלה 4**

א. תוחלת 3000 מ"ל וסטיית תקן 40 מ"ל.

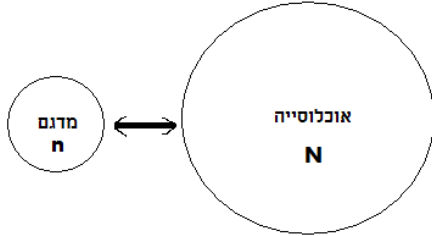
ב. 0.0062

### פרק 3 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

#### רקע:

אוכלוסייה – קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.

למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



מדגם – חלק מתוך האוכלוסייה.

למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.

הדגימה בקורס תהייה דגימה מקרית הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי – גודל המחושב על המדגם.

פרמטר – גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים

למשל:

סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)	
$\bar{X}$	$\mu$	ממוצע
$\hat{p}$	P	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים . הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?



**תרגילים :**

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה בישוב "העוגן".

נגדיר את  $x$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.

מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלויזיה במדגם.

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N = 1000$	

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

3. נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה

ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה ?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

## פרק 4 - התפלגות הדגימה

### ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

#### רקע:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} : \text{ בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם :}$$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב  $\mu$  (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב-  $\sigma^2$ .

סטיית תקן של אוכלוסייה:  $\sigma$ .

#### א. תכונות התפלגות

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$ . תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:

$$V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם טעות תקן:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

**ב. דגימה מהתפלגות נורמאלית**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

**דוגמה: (פתרון בהקלטה)**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם. מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**ג. משפט הגבול המרכזי**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  אזי עבור מדגם מספיק גדול ( $n \geq 30$ )

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

**דוגמה: (פתרון בהקלטה)**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם. דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל 102 גרם?

**תרגילים :**

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

- א. מי האוכלוסייה?
- ב. מה המשתנה?
- ג. מהם הפרמטרים?
- ד. מהו גודל המדגם?
- ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?
- ו. מהי טעות התקן?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים :

מספר מקלטים	מספר המשפחות
0	500
1	2500
2	3500
3	3000
4	500
	<b>סך הכול <math>N = 10000</math></b>

נגדיר את  $x$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $x$ .

ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של  $x$ .

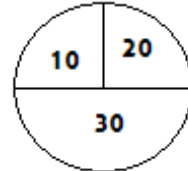
ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3. אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4. משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם  
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?
- נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
- ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג ?
- ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
- ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
- ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?
5. הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
- ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
- ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
- ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
6. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
- ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
- ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
- ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
7. נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
- ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
- ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
- ד. בקבוקי היין שבארגז נמוגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8. משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4 .  
 א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?  
 ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?  
 ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט :



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.  
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.  
 ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?  
 ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?  
 ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?  
 10. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11. מטילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב-50 ההטלות?

12. אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ .  
 א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?  
 ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?  
 ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרכזי.

13. נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	P(X)

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50 . מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?  
 5?

14. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם  $\bar{X}$  :

לכן  $P(\bar{X} > \mu)$  יהיה : ( בחר בתשובה הנכונה )

א. 0

ב. 0.5

ג. 1

ד. לא ניתן לדעת.

15. נתון ש  $X$  מתפלג כלשהו עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים ש :

( בחר בתשובה הנכונה )

א.  $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ב.  $\mu \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ג.  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

ד.  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

16. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  . אם נדגום  $n$  תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$  אזי :

( בחר בתשובה הנכונה )

א.  $\mu$  ו-  $\bar{X}$  יהיו משתנים מקריים.

ב.  $\mu$  יהיה משתנה מקרי ו  $\bar{X}$  קבוע.

ג.  $\bar{X}$  יהיה משתנה מקרי ו  $\mu$  קבוע.

ד.  $\mu$  ו  $\bar{X}$  יהיו קבועים.

17. משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם . החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.  
א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?  
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18. משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?



**פתרונות:****שאלה 2**

א.

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(x)

$$\mu = 2.05 \quad \sigma^2 = 0.9475 \quad \sigma = 0.973 \quad \text{ב.}$$

$$\mu_{\bar{x}} = 2.05 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369 \quad \text{ג.}$$

$$\sigma(\bar{X}) = 0.486$$

**שאלה 3**

$$\mu_{\bar{x}} = 3.5$$

$$\sigma(\bar{X}) = 1.21$$

**שאלה 4**

א. 0.8413

ב. 0.0013

ג. 0

ד. 0.1974

**שאלה 6**

א. 0.0465

ב. 27.71

ג. 0.2628

**שאלה 7**

א. 0

ב. 0.1587

ג. 0.1587

ד. 0.5

**שאלה 8**

א. 0.5468

ב. 0.6826

**שאלה 9**

א.

30	20	10	
0.5	0.25	0.25	P(x)

ב. התוחלת: 22.5

השונות: 68.75

ג. התוחלת: 22.5

השונות: 13.75

ד. 0.8997

**שאלה 10**

0.0475

**שאלה 11**

0.1814

**שאלה 12**

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

**שאלה 14**

התשובה ב

**שאלה 15**

התשובה ד

**שאלה 16**

התשובה ג

**שאלה 17**

א. 2.429

ב. 0.25

## התפלגות סכום תצפיות המדגם ומשפט הגבול המרכזי

### רקע:

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם}$$

כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה.

כלומר, היו  $X_1, \dots, X_n$  - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה  $\mu$  ושונותה  $\sigma^2$  אזי:

### א. התוחלת והשונות של סכום התצפיות:

$$E(T) = n\mu$$

$$V(T) = n\sigma^2$$

### ב. דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

$$T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad \text{אזי}$$

$$\text{אם } X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

### ג. משפט הגבול המרכזי:

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2 \quad \text{אם } X \text{ מתפלג כלשהו וידוע}$$

אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30)

$$T \rightsquigarrow N(n\mu, n\sigma^2)$$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורתיהם לסניף בנק.

- מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
- מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים? (0.1587)

### תרגילים:

1. המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
  - א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?
  - ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?
  - ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
  
2. נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
  - א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?
  - ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
  - ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב הייתה משתנה?
  
3. בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב 4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.
  - א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?
  - ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?

**פתרונות:****שאלה 1**

א. 0.6915

ב. 0.8413

ג. 0.5

**שאלה 2**

א. תוחלת 3000 מ"ל וסטיית תקן 40 מ"ל

ב. 0.0062.

## פרק 5 - מושגים בסיסיים באמידה

### רקע:

כזכור מהמפגש הקודם פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת.

כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייעים לצה"ל- $\mu$ .

כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה -  $p$ .

בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

• נסמן באופן כללי פרמטר באות  $\theta$  ואומד ב- $\hat{\theta}$ .  $\hat{\theta}$  הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את  $\theta$ .

• שגיאת אמידה:  $|\hat{\theta} - \theta|$  - ההפרש בין האומד לאמת(הפרמטר).

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

מה הפרמטר בדוגמה זו?

מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$  יהיה אומד חסר הטיה ל  $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל  $\theta$  :  $E(\hat{\theta}) = \theta$
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר :  $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$

להלן פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה:  $\mu$

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם  $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$E(\bar{x}) = \mu$  לכן  $\bar{x}$  הינו אומר חסר הטיה ל  $\mu$ .

כמו כן טעות תקן:  $SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma(\bar{x})$

פרופורציה באוכלוסייה:  $p$

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם:  $\hat{p} = \frac{y}{n}$

$E(\hat{p}) = p$  לכן  $\hat{p}$  הינו אומר חסר הטיה ל  $p$ .

כמו כן טעות התקן:  $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

שונות האוכלוסייה:  $\sigma^2$

האומד הנקודתי שלו יהיה:  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$E(S^2) = \sigma^2$  ולכן  $S^2$  הינו אומד חסר הטיה ל  $\sigma^2$ .

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

**דוגמה: ( פתרון בהקלטה )**

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה. להלן התוצאות שהתקבלו:

2,1,3,2,1,4,5,2,1,3

אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.



### תרגילים:

1. מתוך 500 טירונים נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
- ב. מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
- ג. מהו האומדן לפרמטר?
- ד. מהי טעות האמידה?
2. לפי נתוני היצרן מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה. במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
- ב. מהי טעות התקן של האומדן?
- ג. מהו האומדן לפרמטר?
- ד. מהי טעות האמידה?
3. נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו:
- 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- א. מצא אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
- ב. מצא אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
- ג. מצא אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
4. נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים. להלן התוצאות שהתקבלו:
- $$\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 162$$
- א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
- ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

5. במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה. דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישובו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?  
 א. סטיית התקן של האוכלוסייה.  
 ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.  
 ג. סטיית התקן של המדגם.  
 ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6. משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהיה:

א. 3

ב. 2.5

ג. 1.581

ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7. במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע,  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , מחולק ב-  $n-1$ ?

א. כאשר  $n$  קטן.

ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.

ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.

ד. כאשר מעוניינים באומדן חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.

ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8.  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע  $\mu$  לא ידוע ושונות

$\sigma^2 = 64$ . טעות התקן של האומדן ל-  $\mu$  היא:

א. 16

ב. 8

ג. 4

ד. 2

9. מהו אומדן חסר הטיה?

- א. אומדן שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומדן שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומדן שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומדן שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

**פתרונות:****שאלה 3**

א. 177.9

ב. 64.1

ג. 0.4

**שאלה 4**

א. 8.1

ב. 3.16

**שאלה 5**

התשובה היא ד.

**שאלה 6**

התשובה היא ג.

**שאלה 7**

התשובה היא ד.

**שאלה 8**

התשובה היא ד.

**שאלה 9**

התשובה היא ג.

**פרק 6 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה)**

**רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה**

**רקע:**

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי. מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה זה לבנות רווח סמך. נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר  $\mu$  ייכלל בתוכו הוא  $1-\alpha$ .

$1-\alpha$  : נקרא רמת בטחון או רמת סמך.

כך ש:  $P(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha$

A - גבול התחתון של רווח הסמך

B - הגבול העליון של רווח הסמך

$L = B - A$  - אורך רווח הסמך

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

מהי אוכלוסיית המחקר?

מה המשתנה באוכלוסייה?

מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?

מהו רווח הסמך?

מה אורך רווח הסמך?

מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (  $\mu$  ) במקרה ש  $\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה

הפרמטר שנרצה לאמוד :  $\mu$

האומד נקודתי :  $\bar{x}$

התנאים לבניית רווח הסמך :

1  $X \sim N$  או  $n \geq 30$

2  $\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה

הנוסחה לרווח הסמך :

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה.

מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה.

נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית:

$$\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\varepsilon$ -נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

בהמשך לשאלה עם הסוללות . מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית :  $L = 2\varepsilon$ .
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך :  $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$
- ככל שמספר התצפיות ( $n$ ) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומדן יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון  $(1-\alpha)$  גבוהה יותר כך  $z_{1-\alpha/2}$  יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

### תרגילים :

1. חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800.
  - א. מי האוכלוסייה במחקר?
  - ב. מה המשתנה הנחקר?
  - ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
  - ד. מה רווח הסמך לפרמטר?
  - ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?
  - ו. מה אורך רווח הסמך?
  - ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
  
2. מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנה את רווח הסמך.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - ג. הסבר כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
  
3. מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - ג. הסבר כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
  
4. דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
  - ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
  - ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
  - ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?
  
5. בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (99,105). שחזרו את :
  - א. ממוצע המדגם.
  - ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
  - ג. רמת הסמך.



6. זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
- ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
- ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
7. חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $82 < \mu < 92$ .
- נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- א. מהו ממוצע המדגם?
- ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5 ?
8. חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, מי מהמשפטים הבאים אינו יהיה נכון.
- א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
- ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
- ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
- ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.
9. חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$  וקיבל  $48 < \mu < 54$  מה נכון בהכרח:
- א.  $\mu = 51$
- ב.  $\bar{X} = 6$
- ג.  $\bar{X} = 51$
- ד. אורך רווח הסמך הינו 3.
10. איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה? (בחר בתשובה הנכונה)
- א. רמת הביטחון.
- ב. סטיית התקן באוכלוסייה.
- ג. מספר המשתתפים.
- ד. סטיית התקן במדגם.

**פתרונות :****שאלה 2**

$$4920.6 < \mu < 4979.4$$

**שאלה 3**

$$א. \quad 223.42 < \mu < 236.58$$

$$ב. \quad 222.16 < \mu < 237.84$$

**שאלה 5**

$$א. \quad 102$$

$$ב. \quad 3$$

$$ג. \quad 0.9544$$

**שאלה 6**

$$א. \quad 83.5 < \mu < 4.42$$

$$ב. \quad \text{יקטן פי 2}$$

$$ג. \quad \text{גדל}$$

**שאלה 7**

$$א. \quad 87$$

$$ב. \quad 5$$

$$ג. \quad 0.9544$$

**שאלה 8**

$$א. \quad 139$$

$$ב. \quad 21 < \mu < 25$$

**שאלה 9**

התשובה היא : ב

**שאלה 10**

התשובה היא : ג

### קביעת גודל מדגם באמידת תוחלת עם שונות אוכלוסייה ידועה

#### רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה:  $\sigma$   
 ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ושגיאת אמידה שלא תעלה על  $\varepsilon$  מסוים, נציב בנוסחה הבאה:

$$n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמיתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87)

**תרגילים:**

1. משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
2. מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5.  
נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.  
א. כמה מתגייסים יש לדגום?  
ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
3. יהי  $X$  משתנה מקרי עם ממוצע  $\mu$  וסטיית תקן  $\sigma$ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$  ברמת ביטחון של 0.95 כך שהאורך של הרווח יהיה  $0.5\sigma$ . מהו גודל המדגם הנדרש?

**פתרונות :****שאלה 1**

780

**שאלה 2**

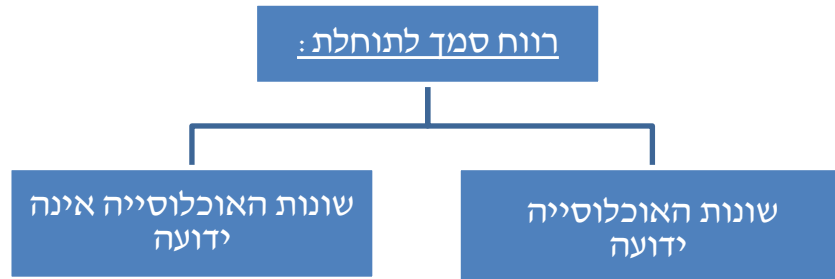
א. 139

ב. הדבר יקטין את  $\varepsilon$  פי 2.**שאלה 3** $n = 62$

## רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה) כששונות האוכלוסייה אינה ידועה

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:



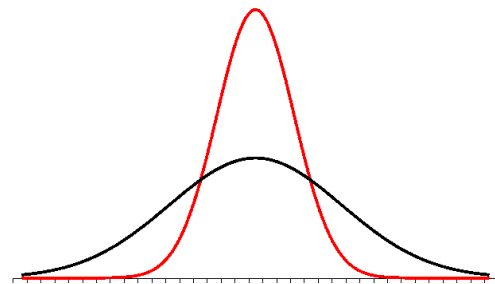
בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה ( $\sigma^2$ ) אינה ידועה לנו. מקרה יותר פרקטי.

התנאי:  $X \sim N$  או שהמדגם גדול

רווח סמך:  $\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} : \text{האומד לשונות}$$

התפלגות T:



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן  $df=n-1$ . ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית. במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו בדקות : 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.  
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

**פתרון :**

$$4.39 < \mu < 5.51$$

### תרגילים:

1. מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 89, 79, 84, 88, 84. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
  - ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
  - ג. בהמשך לסעיף א, אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99% כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
  
2. במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי: גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן  $S=13$  ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
  
3. אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 27, 34, 32, 40, 30.
  - א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
  - ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
  
4. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
  - א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
  - ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.
  - ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
  
5. נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ ,  $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.
  
6. נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\bar{x} = 13.8$ ,  $S = 2$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.



7. שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר  $\mu$ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך.

סטטיסטיקאי א : הניח  $\sigma = 20$

סטטיסטיקאי ב : חישב לפי המדגם וקיבל  $S = 20$

למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר? (בחר בתשובה הנכונה)

א. סטטיסטיקאי א

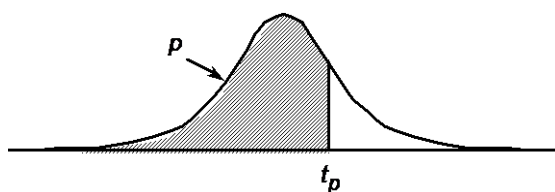
ב. סטטיסטיקאי ב

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

8. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח

הסמך שהתקבל הוא : 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?



P

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

**פתרונות:****שאלה 1**

$$\text{א. } 79.88 < \mu < 89.72$$

**שאלה 4**

$$\text{א. } 96.63 < \mu < 107.37$$

$$\text{ב. } 96.90 < \mu < 107.10$$

**שאלה 5**

$$3.149 < \mu < 3.351$$



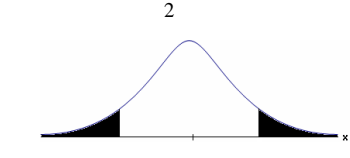
**שאלה 8**

90%

**פרק 7 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)**

**כאשר שונות האוכלוסיה ידועה**

**רקע:**

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבה :
1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים :
$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - דוחים את $H_0$	כלל הכרעה : אזור הדחייה של $H_0$ :

**סטטיסטי המבחן :**

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה :

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה $H_0$ אם מתקיים :
--	--	--	------------------------

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדוק את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

### תרגילים:

1. ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהייה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
2. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
  - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
  - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
3. מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
4. המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ושימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
5. לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ.
  - קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.

6. במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחר בתשובה הנכונה.
- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
  - הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
  - הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
7. חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.
- אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח: (בחר בתשובה הנכונה)
- השערת האפס הייתה נדחית.
  - השערת האפס הייתה לא נדחית.
  - לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.
8. שני סטטיסטיקאים בדקו השערות  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$  עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות. שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.
- אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
  - אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

**פתרונות :****שאלה 1:** $H_0$  נקבל**שאלה 2:** $H_0$  נדחה**שאלה 3:** $H_0$  נדחה**שאלה 4:** $H_0$  נדחה**שאלה 5:** $H_0$  נקבל**שאלה 6:**

א

**שאלה 7:**

ג

**שאלה 8:**

א. אותה מסקנה

ב. לא ניתן לדעת.



**סיכוי לטעויות ועוצמה כאשר שונות האוכלוסייה ידועה**

**רקע:**

		הכרעה	
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

נגדיר את ההסתברויות הבאות:

**הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות)**

$$\alpha = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0)$$

**הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:**

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לקבל את } H_1) = P_{H_1}(H_0)$$

**רמת בטחון:**

$$(1-\alpha) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לקבל את } H_0) = P_{H_0}(H_0)$$

**עוצמה:**

$$\pi = (1-\beta) = P(H_1 \text{ לדחות את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_1) = P_{H_1}(H_1)$$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבה :</b>
<p>3. <math>\sigma</math> ידועה</p> <p>4. <math>X \sim N</math> או מדגם מספיק גדול</p>			<b>תנאים :</b>
$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	<b>כלל ההכרעה :</b> אזור הדחייה של $H_0$ :
$P_{H_1} (\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P_{H_1} (\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P_{H_1} (\mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	<b>חישוב <math>\beta</math> :</b>

התפלגות ממוצע המדגם :  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} : \text{התקנון}$$

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

**תרגילים:**

1. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$  להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר  $\mu$  :
- $$H_0 : \mu = 5$$
- $$H_1 : \mu = 7$$
- מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
- א. עבור אילו ערכים של  $X$  שידגם נדחית השערת  $H_0$  ?
- ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- ג. אם במדגם התקבל ש  $X = 6.9$  מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?
2. לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחות לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א?
3. להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת :
- $$H_0 : \mu = 200$$
- $$H_1 : \mu \neq 200$$
- $$\sigma = 30$$
- $$n = 225$$
- א. רשום כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבר ללא חישוב איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהייה 5%?

4. מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.
- א. רשום את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

5. להלן השערות של מחקר

$$H_0 : \mu = 50$$

$$H_1 : \mu = 58$$

- מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
- ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
1. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
2. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב בררתיות. בחר בכל שאלה את התשובה הנכונה ביותר:

6. אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א ו-ב נכונות.

7. חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

8. מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

$1 - \beta$	$\alpha$
גדולה	גדולה .א.
קטנה	גדולה .ב.
גדולה	קטנה .ג.
קטנה	קטנה .ד.

9. נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית

$H_0$  קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

א. הן  $\alpha$ , והן  $(1 - \beta)$ , יקטנו.

ב.  $\alpha$  יישאר ללא שינוי ואילו  $(1 - \beta)$  יגדל.

ג.  $\alpha$  יגדל ואילו  $(1 - \beta)$  יקטן.

ד. הן  $\alpha$  והן  $(1 - \beta)$  יגדלו.

10. ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב

עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים

וקיבל ממוצע 137.

על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב

העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה ?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

פתרונות :שאלה 1:

א. מעל 6.645

ב. 0.3632

שאלה 2:א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 2.24$ ב. נדחה  $H_0$ 

ג. 1

שאלה 3:א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} > 203.29$  או  $\bar{X} < 196.71$ 

ב. 0.8051

ג. תקטן.

שאלה 4:א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 48.9$ 

ב. 0.0885

ג. תקטן.

ד. תקטן.

שאלה 6:

ד

שאלה 7:

ג

שאלה 8:

ג

שאלה 9:

א

שאלה 10:

ב

### קביעת גודל מדגם כששונות האוכלוסייה ידועה

#### רקע:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu = \mu_1$$

השערות המחקר הן :

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה  $\sigma$  ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על  $\alpha$  והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על  $\beta$ .

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי :

$$n \geq \left( \frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80.

נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם  $\sigma = 17$ .

כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%. כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?



### תרגילים:

1. במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95. אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?

2. משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?)

$$3. \begin{aligned} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{aligned} \quad \text{השערות המחקר הן :}$$

כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה  $\sigma$  מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על  $\alpha$  והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על  $\beta$ .

הוכח שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה :

$$n \geq \left( \frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

**פתרונות :**

**שאלה 1:**

41

**שאלה 2 :**

78

**שאלה 3:**

הוכחה

## מובהקות התוצאה ( p-value ) בבדיקת השערות על תוחלת עם שונות ידועה

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:  
 באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב-  $p_v$ .  
 את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.  
 המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

$$\text{אם } p_v \leq \alpha \text{ דוחים את } H_0$$

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$$p_v = P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

אם ההשערה היא דו צדדית :

$$p_v = 2 P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבה :
.5 $\sigma$ ידועה			תנאים :
.6 $X \square N$ או מדגם מספיק גדול			
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ כאשר בהנחת השערת האפס :}$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

### תרגילים:

1. לפניך השערות של מחקר :

$$H_0 : \mu = 70$$

$$H_1 : \mu > 70$$

המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות :

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 74$$

מהי מובהקות התוצאה?

2. השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

3. אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ – 100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

4. מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

5. אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאוד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון? לא נכון? נמק.
6. בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value}=0.02$ .  
 מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה.  
 א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.  
 ב. ידחה את השערת האפס מקרה.  
 ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.  
 ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
7. מובהקות התוצאה (PV) היא גם : ( בחר בתשובה הנכונה )  
 א. רמת המובהקות המינימלית לדחות השערת האפס.  
 ב. רמת המובהקות המקסימלית לדחיית השערת האפס.  
 ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.  
 ד. רמת המובהקות המינימלית לאי דחיית השערת האפס.
8. בבדיקת השערות מסוימת התקבל  $p\text{ value}=0.0254$  לכן (בחר בתשובה הנכונה):  
 א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .  
 ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .  
 ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .  
 ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

0.0228

**שאלה 2:**

עבור כל רמת מובהקות סבירה.

**שאלה 3:**

ב. 0.1056

ג. 0.1056

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

**שאלה 4:**

א. 0.0006

ב. יקטן.

ג. נכריע שאין כיוול.

**שאלה 5:**

נכון

**שאלה 6:**

תשובה א:

**שאלה 7:**

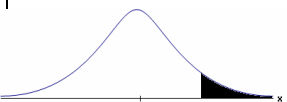

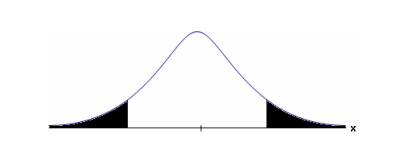
תשובה א :

**שאלה 8:**

תשובה ג :

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כאשר שונות האוכלוסייה אינה ידועה

רקע:

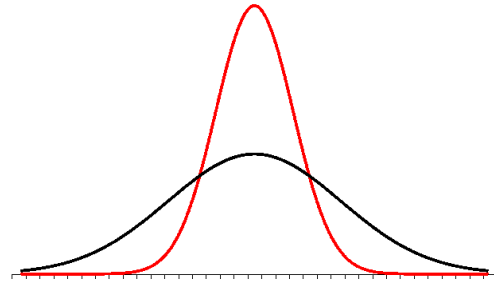
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבה :
7. $\sigma$ אינה ידועה			תנאים :
8. $X \square N$ או מדגם מספיק גדול			
$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה : אזור הדחייה של $H_0$ :
$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ ) $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה : נדחה $H_0$ אם מתקיים :

סטטיסטי המבחן :

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן  $df=n-1$ . ככל שדרגות החופש עלות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ.  
 כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.  
 א. מהן השערות המחקר?  
 ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?  
 ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

### תרגילים:

1. משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

2. משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

3. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מבארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

4. באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

5. ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.

ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ .

רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ .

מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

6. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר.

החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את

קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15

תצפיות.

בחר בתשובה הנכונה :

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

**פתרונות:****שאלה 1:** $H_0$  נדחה**שאלה 2:** $H_0$  נדחה**שאלה 3:** $H_0$  נקבל**שאלה 4:** $H_0$  נקבל**שאלה 5:**

התשובה היא : ב

**שאלה 6:**

התשובה היא : ג

## מובהקות התוצאה ( p-value ) כאשר שונות האוכלוסייה לא ידועה

### רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא :

$$\text{אם } p_v \leq \alpha \text{ דוחים את } H_0$$

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$$p_v = P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

אם ההשערה היא דו צדדית :

$$p_v = 2 P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבה :
9. $\sigma$ אינה ידועה			תנאים :
10. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n - 1$$

**דוגמה** : (פתרון בהקלטה)

- ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם : 27, 34, 32, 40, 30 . הנח שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.
- א. רשום את השערות המחקר.
- ב. מצא חסמים למובהקות התוצאה.
- ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% ?

### תרגילים :

1. קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים :
- $$1008, 1024, 996, 1005, 997$$
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.  
 ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
2. חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.  
 מהי ה- $\alpha$  המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?
3. הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות :
- $$\bar{x} = 176.2$$
- $$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$
- מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק. מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

פתרונות :

שאלה 3:

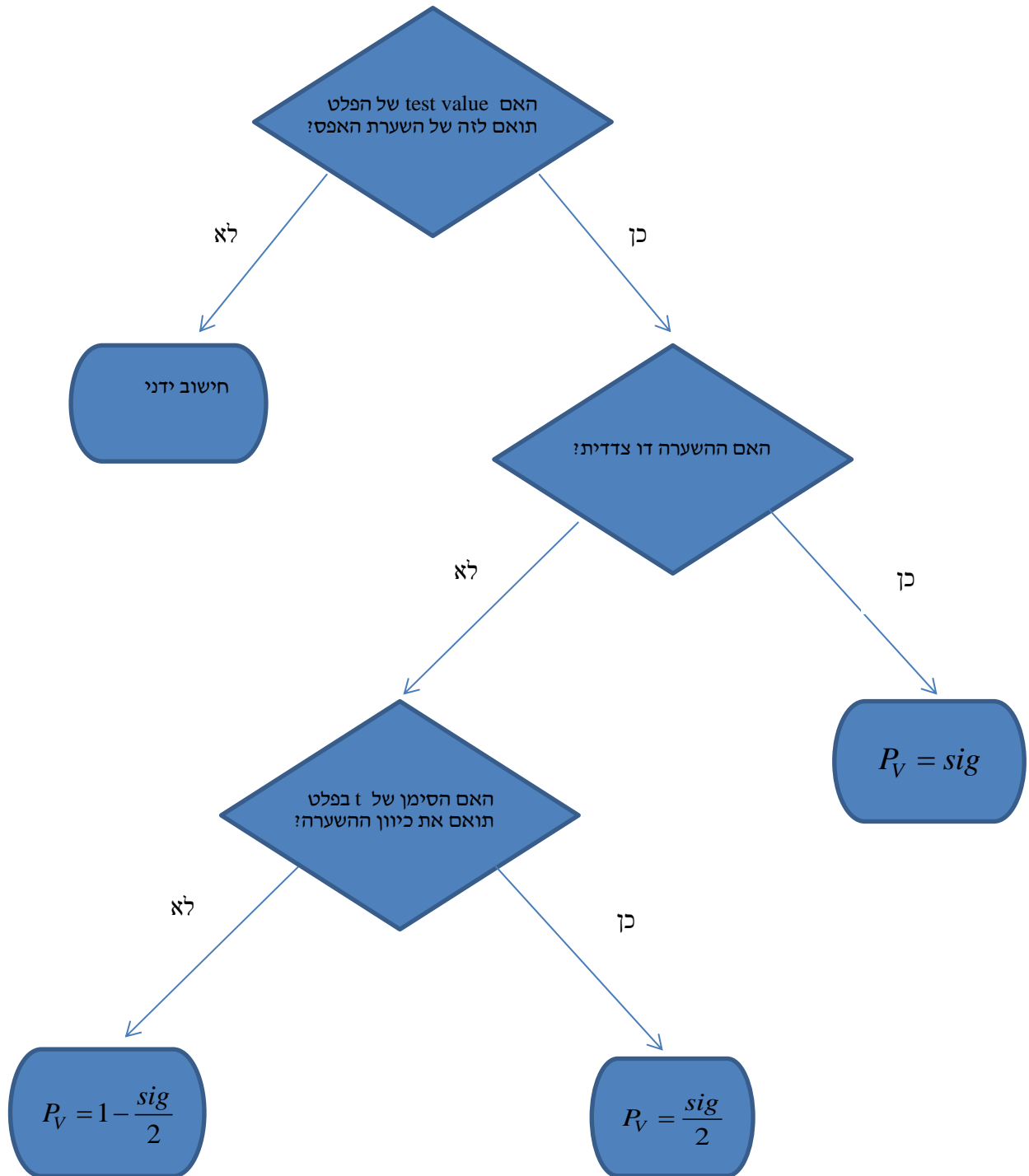
נקבל  $H_0$



## ניתוח פלטי SPSS

**רקע:**

חישוב מובהקות התוצאה באמצעות פלט תוכנת SPSS



**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

**One-Sample Statistics**

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
×	25	87.6400	64.90434	12.98087

**One-Sample Test**

	Test Value = 60					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
×	2.129	24	.044	27.64000	.8488	54.4312

ממוצע הציונים במבחן המיצב בחשבון הוא 60. הוחלט לדגום כיתה אקראית של 25 תלמידים וללמד אותם בשיטת לימוד חדשה.

א. מהו רווח הסמך לממוצע הציונים בחשבון אם יוחלט ליישם את שיטת הלימוד החדשה?

ב. מהו  $P_V$  לבדיקת יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?

ג. מה יוכרע ברמת מובהקות של 5% לגבי יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?

**תרגילים :**

1. באוניברסיטה גדולה גיל הסטודנטים לתואר ראשון מתפלג נורמאלי. בעבר פורסם שהגיל הממוצע של הסטודנטים הינו 23. להלן פלט תוכנת SPSS על מדגם של 16 סטודנטים אקראיים מתואר ראשון:

**One-Sample Statistics**

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
age	16	23.4375	2.50250	.62562

**One-Sample Test**

	Test Value = 23					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
age	.699	15	.495	.43750	-.8960	1.7710

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?  
 ב. מה ערכו של הפרמטר לפי השערת האפס?  
 ג. רשום רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת גיל הסטודנטים באוניברסיטה לתואר ראשון.  
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם הגיל הממוצע כיום שונה מבעבר?

2. קבוצת ילדים בגיל 6 קיבלה משימה לביצוע. עבור כל ילד בדקו כמה זמן לקח לו לסיים את המשימה בדקות. להלן תוצאות הניתוח הסטטיסטי:

**One-Sample Test**

	Test Value = 4.5					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
time	-1.853	24	.076	-.09200	-.1944	.0104

- א. כמה ילדים השתתפו במחקר?  
 ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת זמן ביצוע המשימה עבור ילדים בני 6.  
 ג. מה יש להניח כדי שרווח הסמך מסעיף א' יהיה תקף?  
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% שזמן ביצוע המשימה הממוצע נמוך מ-4.5 דקות.

3. לפניך פלט מחשב עבור ניתוח סטטיסטי שנעשה בתוכנת SPSS. הניתוח הוא עבור מדגם אקראי של קבוצת נבחנים בבגרות באנגלית.

#### One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
grade	???	???	19.62787	2.95901

#### One-Sample Test

	Test Value = 75					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
grade	???	43	.017	-7.34091	-13.3083	???

- א. השלם את הגדלים החסרים המסומנים בסמני שאלה בפלט.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים שונה מ-75?  
 ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים קטנה מ-75?  
 ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים גדולה מ-75?

4. יצרן סיגריות מפרסם כי תוחלת הניקוטין בסיגריות שהוא מיצר קטנה מ- 27 מ"ג. בבדיקה מקרית של 5 סיגריות מתוצרתו נמצאו כמויות הניקוטין הבאות:  
 21, 21, 20, 24, 22 מ"ג. הנח כי כמות הניקוטין בסיגריות מפולג נורמאלי.

#### One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
nicotine	5	21.6000	1.51658	.67823

#### One-Sample Test

	Test Value = 27					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
nicotine	-7.962	4	.001	-5.40000	-7.2831	-3.5169

- א. האם ברמת מובהקות של 5% ניתן להסיק שיש אמת בפרסום?  
 ב. אם הינו מוסיפים עוד תצפית שערכה 20. כיצד הדבר היה משפיע על הערך Sig ועל המסקנה?  
 ג. בדוק האם ניתן להגיד שתוחלת רמת הניקוטין שונה מ- 26 ברמת מובהקות של 5%.

**פתרונות :****שאלה 1:**

ב. 23

ג. (22.104, 24.771)

ד. נקבל  $H_0$ **שאלה 2:**

א. 25

ב. (4.3056, 4.5104)

ד. נדחה  $H_0$ **שאלה 3:**א.  $n = 44$ 

$$\bar{X} = 67.66$$

$$t = -2.48$$

$$upper = -1.3735$$

ב. 0.017

ג. 0.0085

ד. 0.9915

**שאלה 4:**

א. נכריע שיש אמת בפרסום.

ב. מסקנה לא תשתנה.

ג. נכריע שהתוחלת שונה מ-26.

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת

### רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu$ :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ל  $\mu$ :

אם  $\mu_0$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$

אם  $\mu_0$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו:

$$H_0 : \mu = 80$$

$$H_1 : \mu \neq 80$$

$$\alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל:  $79 < \mu < 84$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

**תרגילים :**

1. חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = 90$$

$$H_1 : \mu \neq 90$$

החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא : (87,97).  
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

2. חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.  
ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבר.

3. יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה.  
משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.

ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

**פתרונות :****שאלה 1:**

1. נקבל השערת  $H_0$

**שאלה 2:**

א.  $112.87 \leq \mu \leq 118.13$

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

**שאלה 3:**

א.  $191.8 \leq \mu \leq 200.2$

ב. נכריע שיש אמת בפרסום.



